Geometria B

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2022/2023
12 giugno 2023

Esercizio 3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ considerate gli insiemi

$$\begin{aligned}\gamma &= \{(x,y,z)\,:\,(x-2)^2+y^2=1,\, z=0\}\,,\\ L &= \{(x,y,z)\,:\,y=z=0,\,-1\le x\le 1\},\\ S &= \{(x,y,z)\,:\,z=0,\,x\ge 1\}.\end{aligned}$$

Sia poi T lo spazio ottenuto dalla rotazione di γ attorno all'asse y. Calcolare

(3a) il gruppo fondamentale di $X := T\cup L$;

(3b) il gruppo fondamentale di $Y := T\cup L\cup S$.

Soluzione proposta. (3a) Lo spazio X è formato dal toro T, ottenuto dalla rotazione della circonferenza γ attorno all'asse y, unito al segmento L. Si noti come, tramite un'omotopia, il segmento L può essere deformato in modo da concludere che X è omotopicamente equivalente a $T\vee S^1$.* Segue quindi che il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})*\mathbb{Z}$. Alternativamente, si può procedere usando il Teorema di Seifert-Van Kampen (seconda versione) considerando, per esempio, i seguenti insiemi aperti:

$$U := T\cup\{(x,y,z)\,:\,y=z=0,\,-1\le x<-1/4\}\cup\{(x,y,z)\,:\,y=z=0,\,1/4<x\le 1\},$$

$$V := \{(x,y,z)\,:\,y=z=0,\,-1/2<x<1/2\}.$$

Si conclude quindi che

$$\pi_1(X)\overset{SVK2}{\simeq}\pi_1(U)*\mathbb{Z}\overset{\substack{retraz.\\ per\ def.}}{\simeq}\pi_1(T)*\mathbb{Z}\simeq(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})*\mathbb{Z}.$$

(3b) Lo spazio Y è formato dallo spazio X unito al semipiano S. Si noti che S si può retrarre per deformazione sul disco

$$\mathcal{D} := \{(x,y,z)\,:\,(x-2)^2+y^2\le 1,\,z=0\}$$

avente come bordo la circonferenza γ; si ottiene che Y è omotopicamente equivalente a $X\cup\mathcal{D}$. Possiamo ora† dotare Y di una struttura di CW-complesso finito e considerare il sottocomplesso chiuso e contraibile $\mathcal{D}$. Per il teorema di omotopia dei CW-complessi finiti‡ possiamo scrivere

$$Y\sim Y/\mathcal{D},$$

dove $Y/\mathcal{D}$ è il toro a cui è stato "strozzato" un generatore, unito al segmento L. Analogamente al punto (3a), il segmento L può essere deformato tramite un'omotopia in modo da concludere che $Y/\mathcal{D}$ è omotopicamente equivalente a $T/\mathcal{D}\vee S^1$. Quest'ultimo ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$. Concludiamo quindi che

$$\pi_1(Y)\simeq\mathbb{Z}*\mathbb{Z}.$$

*In analogia con quanto visto a esercitazione negli esercizi 2.25 e 2.26 del secondo foglio di esercizi.

†In stretta analogia con quanto visto nell'esercizio 2.16 del secondo foglio di esercizi.

‡Teorema 2.18 delle note del Prof. Occhetta.